## الكرة التي تمس مستويات الإحداثيات وطول نصف قطرها نق:

يكون مركزها هو النقطة $(\pm نق ، \pm نق ، \pm نق)$

**مثال**

أوجد معادلة الكرة التي تمس مستويات الإحداثيات والإحداثيات مركزها موجبة وطول نصف قطرها ٥ وحدات

**الحل**

∵ مركز الكرة (٥ ، ٥ ، ٥) ، نق = ٥

∴ معادلة الكرة هي: $(س - ٥)^2 + (ص - ٥)^2 + (ع - ٥)^2 = ٢٥$

---

## الكرة التي مركزها (أ ، ب ، جـ) وتمس محاور الإحداثيات الثلاثة:

∵ طول نصف الكرة = نق ويكون

بعد المركز عن محور س $= \sqrt{ب^2 + جـ^2} =$ نق ، بعد المركز عن محور ص $= \sqrt{أ^2 + جـ^2} =$ نق ، بعد المركز عن محور ع $= \sqrt{أ^2 + ب^2} =$ نق

∴ $\sqrt{ب^2 + جـ^2} = \sqrt{أ^2 + جـ^2} = \sqrt{أ^2 + ب^2} =$ نق

∴ $\sqrt{ب^2 + جـ^2} = \sqrt{أ^2 + جـ^2}$ بالتربيع ∴ $ب^2 + جـ^2 = أ^2 + جـ^2$ ∴ $ب^2 = أ^2$ ∴ $|ب| = |أ|$

وشرط كذلك $|أ| = |ب| = |جـ|$

∴ نق $= \sqrt{أ^2 + أ^2} = \sqrt{٢أ^2}$ ∴ نق $= \sqrt{٢}\,|أ|$ أي نق $= \sqrt{٢}\,|ب| = \sqrt{٢}\,|جـ|$

~~∴ المركز (|أ| ، |ب| ، |جـ|) = (±|أ| ، ±|أ| ، ±|أ|)~~

فإذا كانت الكرة تمس الأجزاء الموجبة من محاور الإحداثيات = (±أ ، ±أ ، ±أ)

∴ مركز الكرة (أ ، أ ، أ)

**مثال**

أوجد معادلة الكرة التي تمس الأجزاء الموجبة من محاور الإحداثيات وطول قطرها $٦\sqrt{٢}$ وحدة طول.

**الحل**

∵ الكرة تمس الأجزاء الموجبة من محاور الإحداثيات

∴ المركز (أ ، أ ، أ) ، نق $= \frac{٦\sqrt{٢}}{٢} = ٣\sqrt{٢}$ وحدة طول

∵ $\sqrt{٢}$ أ = نق ∴ أ $= \frac{٣\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = ٣$ ، المركز (٣ ، ٣ ، ٣)

∴ معادلة الكرة هي: $(س - ٣)^2 + (ص - ٣)^2 + (ع - ٣)^2 = ١٨$

ملخص: إذا كانت $م_1 ، م_2$ مركزي كرتين طولا نصفي قطريهما $نق_1 ، نق_2$ على الترتيب حيث $نق_1 > نق_2$

١) الكرتان متباعدتان $\therefore م_1م_2 > نق_1 + نق_2$

٢) الكرتان تتماسان من الخارج $\therefore م_1م_2 = نق_1 + نق_2$

٣) الكرتان تتماسان من الداخل $\therefore م_1م_2 = نق_1 - نق_2$

٤) الكرتان متقاطعتان $نق_1 - نق_2 < م_1م_2 < نق_1 + نق_2$

٥) الكرتان إحداهما بداخل الأخرى $م_1م_2 < نق_1 - نق_2$

٦) الكرتان لهما نفس المركز $\therefore م_1م_2 = \text{صفر}$

**مثال**

إذا كانت الكرتان $(س-3)^2 + (ص-1)^2 + (ع-2)^2 = 100$ ، $(س+1)^2 + (ص-4)^2 + (ع-ل)^2 = 9$ متماستين أوجد ل.

**الحل**

$\therefore م_1(3 ، 1 ، 2)$ ، $نق_1 = \sqrt{100} = 10$

، $م_2(-1 ، 4 ، ل)$ ، $نق_2 = \sqrt{9} = 3$

$\therefore م_1م_2 = \sqrt{(3+1)^2 + (1-4)^2 + (2-ل)^2} = \sqrt{16 + 9 + (2-ل)^2} = \sqrt{25 + (2-ل)^2}$

$\therefore$ الكرتان متماستان

إذا: $م_1م_2 = نق_1 + نق_2 = 10 + 3 = 13$ (تماس من الخارج)

$\sqrt{25 + (2-ل)^2} = 13$ بالتربيع $\therefore 25 + (2-ل)^2 = 169$

$\therefore (2-ل)^2 = 144$ $\therefore 2 - ل = \pm 12$

إما $2 - ل = 12$ $\therefore ل = -10$ ، أو $2 - ل = -12$ $\therefore ل = 14$

أو $م_1م_2 = نق_1 - نق_2 = 10 - 3 = 7$ (تماس من الداخل)

$\sqrt{25 + (2-ل)^2} = 7$ بالتربيع $\therefore 25 + (2-ل)^2 = 49$

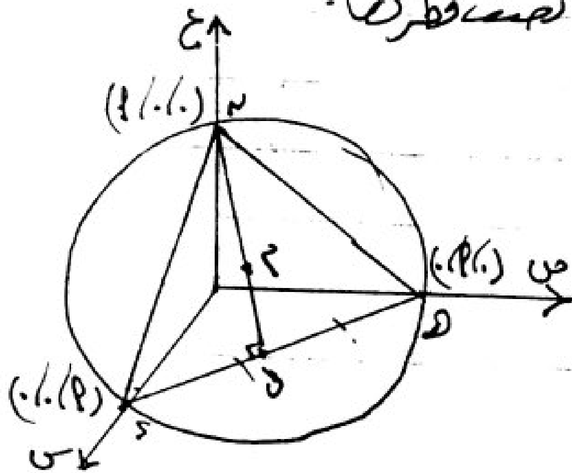
$\therefore (2-ل)^2 = 24$ $\therefore 2 - ل = \pm 2\sqrt{6}$

$\therefore 2 - ل = 2\sqrt{6}$ $\therefore ل = 2 - 2\sqrt{6}$

أو $2 - ل = -2\sqrt{6}$ $\therefore ل = 2 + 2\sqrt{6}$

**ملاحظة هامة**

لكي تحصل على أصغر كرة تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة فإنه هذه النقط لابد أن تقع على أكبر دائرة في الكرة ويكون لها نفس مركز الكرة ونفس نصف قطرها.




فإذا كونت النقاط الثلاث مثلث متساوي الأضلاع ولتكن رؤوسه (أ، ٠، ٠)، (٠، أ، ٠)، (٠، ٠، أ)

∴ المركز م = $\left(\frac{أ+٠+٠}{٣}، \frac{٠+أ+٠}{٣}، \frac{٠+٠+أ}{٣}\right)$

$= \left(\frac{أ}{٣}، \frac{أ}{٣}، \frac{أ}{٣}\right)$

وطول ضلع المثلث = $\sqrt{أ^٢ + ٠ + أ^٢} = \sqrt{٢أ^٢} = \sqrt{٢}|أ|$

نصف قطر الدائرة = م د = $\frac{٢}{٣}$ ب ل = $\frac{٢}{٣}$ طول ضلع المثلث حا ٦٠

∴ نق = $\frac{٢}{٣} \times \sqrt{٢}|أ| \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{\sqrt{٦}|أ|}{٣}$

**∴ نق = $\frac{\sqrt{٦}}{٣}|أ|$**

أو

نق = م ب = $\sqrt{\left(٠-\frac{أ}{٣}\right)^٢ + \left(٠-\frac{أ}{٣}\right)^٢ + \left(أ-\frac{أ}{٣}\right)^٢}$

$= \sqrt{\frac{أ^٢}{٩} + \frac{أ^٢}{٩} + \frac{٤}{٩}أ^٢} = \sqrt{\frac{٦أ^٢}{٩}} = \frac{\sqrt{٦}|أ|}{٣}$

**مثال**

أوجد معادلة أصغر كرة تمر بالنقط (٤، ٠، ٠)، (٠، ٤، ٠)، (٠، ٠، ٤)

**الحل**

∵ النقط (٤، ٠، ٠)، (٠، ٤، ٠)، (٠، ٠، ٤) هي رؤوس مثلث متساوي الأضلاع

طول ضلعه = $\sqrt{(٤)^٢ + (٤)^٢ + ٠} = \sqrt{١٦+١٦} = \sqrt{٣٢} = ٤\sqrt{٢}$ وحدة طول

∴ نصف قطر الدائرة المارة بهذه النقط = $\frac{٤\sqrt{٦}}{٣}$ وحدة طول

، مركزها $\left(\frac{٤}{٣}، \frac{٤}{٣}، \frac{٤}{٣}\right)$

∴ معادلة أصغر كرة هي

$\left(س-\frac{٤}{٣}\right)^٢ + \left(ص-\frac{٤}{٣}\right)^٢ + \left(ع-\frac{٤}{٣}\right)^٢ = \frac{٣٢}{٣}$

**مثال**

أوجد معادلة الكرة التي يقع مركزها في المستوى س ع وتمر بالنقط
أ (٠، ٨، ٠) ، ب (٤، ٦، ٢) ، جـ (٠، ١٢، ٤)

**الحل**

∵ الكرة مركزها يقع في المستوى س ع ∴ ك = ٠

∴ معادلة الكرة هي

س² + ص² + ع² + ٢ل س + ٢ن ع + د = ٠

∵ أ (٠، ٨، ٠) تحقق معادلة الكرة

∴ ٦٤ + ٠ + ٠ + ٠ + د = ٠ ∴ د = −٦٤

∵ ب (٤، ٦، ٢) تحقق معادلة الكرة

١٦ + ٣٦ + ٤ + ٨ل + ٤ن − ٦٤ = ٠

٢ل + ن = ٢ ①

∵ جـ (٠، ١٢، ٤) تحقق معادلة الكرة

١٤٤ + ١٦ + ٨ن − ٦٤ = ٠ ∴ ن = −١٢

بالتعويض في ① ٢ل − ١٢ = ٢ ∴ ل = ٧

معادلة الكرة هي:

س² + ص² + ع² + ١٤س − ٢٤ع − ٦٤ = ٠

---

**ملاحظة هامة:** الكرة التي مركزها (س١، ص١، ع١) وتمس المستوى الذي معادلته

① س = س١ ∴ نق = |س − س١| ، ② ص = ص١ ∴ نق = |ص − ص١| ، بالمثل في الحالة ③ نق = |ع − ع١|

**مثال**

أوجد معادلة الكرة التي مركزها (٢، −٣، ٤) وتمس المستوى الذي معادلته ع = ٣

**الحل**

∵ نق = |٤ − ٣| = ١

معادلة الكرة هي (س − ٢)² + (ص + ٣)² + (ع − ٤)² = ١

## جمع المتجهات في الفراغ:

إذا كان $\vec{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $\vec{ب} = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$

فإن $\vec{أ} + \vec{ب} = (أ_س + ب_س ، أ_ص + ب_ص ، أ_ع + ب_ع)$

**مثال**

إذا كان $\vec{أ} = (٤ ، -٤ ، ٠)$ ، $\vec{ب} = (-١ ، ٥ ، ٢)$ أوجد $\vec{أ} + \vec{ب}$ .

**الحل**

$\vec{أ} + \vec{ب} = (٤ ، -٤ ، ٠) + (-١ ، ٥ ، ٢)$

$= (٤ + -١ ، -٤ + ٥ ، ٠ + ٢) = (٣ ، ١ ، ٢)$

## ضرب المتجه في عدد حقيقي:

إذا كان $\vec{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ في ع٣ وكان ك ∈ ح فإن

ك $\vec{أ}$ = ك $(أ_س ، أ_ص ، أ_ع) = (ك أ_س ، ك أ_ص ، ك أ_ع)$ في ع٣

**مثال**

$٢(-١ ، ٣ ، ٢) = (-٢ ، ٦ ، ٤)$ ، $-\frac{١}{٢}(٢ ، -٤ ، ٦) = (-١ ، ٢ ، -٣)$

## خاصية هامة

إذا كان $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ في ع٣ ، ك ∈ ح فإن:

ك $(\vec{أ} + \vec{ب})$ = ك $\vec{أ}$ + ك $\vec{ب}$ .

**مثال**

إذا كان $\vec{جـ} = (٢ ، -٣ ، ١)$ ، $\vec{د} = (٠ ، ٢ ، -٣)$

١) أوجد ٥ $\vec{جـ}$ − ٢ $\vec{د}$ ٢) إذا كان ٣ $\vec{أ}$ − ٤ $\vec{د}$ = $\vec{جـ}$ فأوجد $\vec{أ}$

**الحل**

١) ٥ $\vec{جـ}$ − ٢ $\vec{د}$ = ٥ $(٢ ، -٣ ، ١)$ − ٢ $(٠ ، ٢ ، -٣)$

$= (١٠ ، -١٥ ، ٥) + (٠ ، -٤ ، ٦) = (١٠ ، -١٩ ، ١١)$

٢) ٣ $\vec{أ}$ − ٤ $\vec{د}$ = $\vec{جـ}$

٣ $\vec{أ}$ = $\vec{جـ}$ + ٤ $\vec{د}$

$= (٢ ، -٣ ، ١) + ٤(٠ ، ٢ ، -٣)$

$= (٢ ، -٣ ، ١) + (٠ ، ٨ ، -١٢)$

٣ $\vec{أ} = (٢ ، ٥ ، -١١)$ بالضرب × $\frac{١}{٣}$

$\vec{أ} = (\frac{٢}{٣} ، \frac{٥}{٣} ، -\frac{١١}{٣})$

# تساوي متجهين في الفراغ

اذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $\overrightarrow{ب} = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$ فإن $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$ اذا وفقط اذا كان $أ_س = ب_س$ ، $أ_ص = ب_ص$ ، $أ_ع = ب_ع$

**مثال**

أوجد قيمة ل ، م ، ن التي تجعل المتجهين $\overrightarrow{أ} = (ل - ٤ ، م^٢ - ٣ ، ١)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٥ ، ١ ، ن^٢)$ متساويين.

**الحل**

$\because \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$

$(ل - ٤ ، م^٢ - ٣ ، ١) = (٥ ، ١ ، ن^٢)$

$\therefore ل - ٤ = ٥$ ، $م^٢ - ٣ = ١$ ، $١ = ن^٢$

$\therefore ل = ٩$ ، $م^٢ = ٤ \therefore م = \pm ٢$ ، $ن = \pm ١$

---

**متجه الوحدة**

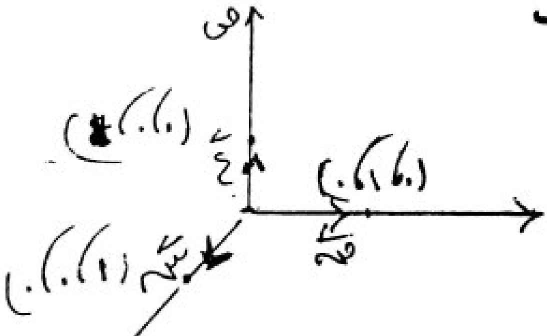
يعرف متجه الوحدة بأنه المتجه الذي معياره يساوي وحدة الأطوال

**مثال:** $\overrightarrow{أ} = (\frac{-٣}{١٣} ، \frac{٤}{١٣} ، \frac{١٢}{١٣})$ متجه وحدة لأن $\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{\frac{٩}{١٦٩} + \frac{١٦}{١٦٩} + \frac{١٤٤}{١٦٩}} = ١$

## متجهات الوحدة الأساسية $(\overrightarrow{س} ، \overrightarrow{ص} ، \overrightarrow{ع})$

$\overrightarrow{س} = (١ ، ٠ ، ٠)$ ، $\overrightarrow{ص} = (٠ ، ١ ، ٠)$

$\overrightarrow{ع} = (٠ ، ٠ ، ١)$




## التعبير عن متجه في الفراغ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية:

اذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع) \in ح^٣$ فإن المتجه $\overrightarrow{أ}$ يمكن كتابته على الصورة

$$\overrightarrow{أ} = أ_س \overrightarrow{س} + أ_ص \overrightarrow{ص} + أ_ع \overrightarrow{ع}$$

## مثال

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = −٣ص − ع + ٥س ، $\overrightarrow{ب}$ = −٢ع + ٣س أوجد

(أ) ٣$\overrightarrow{أ}$ − ٥$\overrightarrow{ب}$ (ب) ‖$\overrightarrow{أ}$ − $\overrightarrow{ب}$‖

**الحل**

(أ) ٣$\overrightarrow{أ}$ − ٥$\overrightarrow{ب}$ = ٣(٥س − ٣ص − ع) − ٥(٣س − ٢ع)

= (١٥س − ٩ص − ٣ع) + (−١٥س + ١٠ع)

= −٩ص + ٧ع

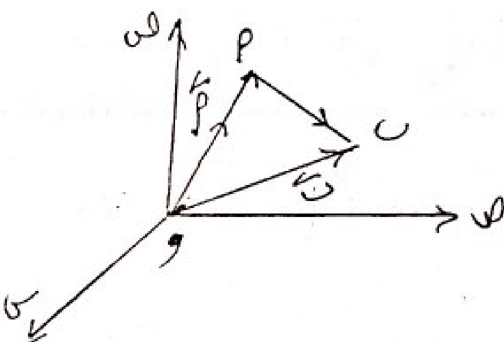
(ب) $\overrightarrow{أ}$ − $\overrightarrow{ب}$ = (٥س − ٣ص − ع) − (٣س − ٢ع)

= (٥س − ٣ص − ع) + (−٣س + ٢ع)

= ٢س − ٣ص + ع

‖$\overrightarrow{أ}$ − $\overrightarrow{ب}$‖ = $\sqrt{٤ + ٩ + ١}$ = $\sqrt{١٤}$

## التعبير عن قطعة مستقيمة موجهة في الفراغ بدلالة إحداثيات طرفيها




لاحظ الشكل

$\overrightarrow{وأ}$ + $\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{وب}$

، $\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{وب}$ − $\overrightarrow{وأ}$

∴ **$\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{ب}$ − $\overrightarrow{أ}$**

## مثال

① إذا كان أ = (٢، −٣، ٠) ، ب = (١، ٤، −١) أوجد $\overrightarrow{أب}$

∵ $\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{ب}$ − $\overrightarrow{أ}$ = (١، ٤، −١) − (٢، −٣، ٠) = (−١، ٧، −١)

② إذا كان أ (١، ١، −٢) ، $\overrightarrow{أب}$ = (٤، −١، ٢) أوجد إحداثيات نقطة ب

∵ $\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{ب}$ − $\overrightarrow{أ}$

∴ $\overrightarrow{ب}$ = $\overrightarrow{أب}$ + $\overrightarrow{أ}$ = (٤، −١، ٢) + (١، ١، −٢) = (٥، ٠، ٠)

∴ إحداثيات نقطة ب (٥، ٠، ٠)

## متجه الوحدة في اتجاه متجه معلوم:

هو متجه معياره يساوي الوحدة وله اتجاه المتجه المعلوم ويرمز له بالرمز $\vec{U}$

اذا كان $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ فإن متجه الوحدة في اتجاه $\vec{A}$ هو $\vec{U}_A$ حيث

$$\vec{U}_A = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \frac{\text{المتجه}}{\text{معياره}} \qquad \therefore \vec{A} = \|\vec{A}\| \, \vec{U}_A$$

**مثال:**

اذا كان $\vec{A} = (-2, 2, 1)$ ، $\vec{B} = (3, 1, -2)$ أوجد متجه الوحدة في اتجاه كل من $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ ، $\vec{AB}$ .

**الحل:**

$$\vec{U}_A = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \frac{(-2,2,1)}{\sqrt{4+4+1}} = \left(\frac{-2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\vec{U}_B = \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|} = \frac{(3,1,-2)}{\sqrt{9+1+4}} = \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}\right)$$

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (3,1,-2) - (-2,2,1) = (5,-1,-3)$$

$$\therefore \vec{U}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} = \frac{(5,-1,-3)}{\sqrt{25+1+9}} = \left(\frac{5}{\sqrt{35}}, \frac{-1}{\sqrt{35}}, \frac{-3}{\sqrt{35}}\right)$$

---

**مثال:**

اذا كان $\|\vec{F}\| = 26$ وحدة قوة ديناميكية تعمل في اتجاه $\vec{AB}$ حيث $A(2,5,7)$ ، $B(-2,2,-5)$ أوجد $\vec{F}$ .

**الحل:**

$\because \vec{F} = \|\vec{F}\| \times$ متجه الوحدة في اتجاهها

$$= \|\vec{F}\| \, \vec{U}_{AB}$$

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (-2,2,-5) - (2,5,7) = (-4,-3,-12)$$

$$\vec{U}_{AB} = \frac{(-4,-3,-12)}{\sqrt{16+9+144}} = \frac{(-4,-3,-12)}{13}$$

$$\vec{F} = 26 \times \frac{(-4,-3,-12)}{13}$$

$$\vec{F} = (-8,-6,-24)$$

$= -8$ س $- 6$ ص $- 24$ ع

أو

$$\vec{F} = \|\vec{F}\| \times \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$$

$$\vec{F} = 26 \times \frac{(-4,-3,-12)}{\sqrt{16+9+144}}$$

$$= 26 \times \frac{(-4,-3,-12)}{13}$$

$= (-8,-6,-24) = -8$ س $- 6$ ص $- 24$ ع

# زوايا الاتجاه وجيوب تمام زوايا الاتجاه لمتجه في الفراغ:

إذا كان $\overrightarrow{A} = (A_س , A_ص , A_ع)$ متجه في الفراغ وكانت $(\theta_س , \theta_ص , \theta_ع)$ قياسات الزوايا التي يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب للمحاور س، ص، ع على الترتيب فإنه:

$A_س = \|\overrightarrow{A}\|$ جتا $\theta_س$ ، $A_ص = \|\overrightarrow{A}\|$ جتا $\theta_ص$

$A_ع = \|\overrightarrow{A}\|$ جتا $\theta_ع$

$\therefore \overrightarrow{A} = \|\overrightarrow{A}\|$ جتا $\theta_س \, \overrightarrow{س} + \|\overrightarrow{A}\|$ جتا $\theta_ص \, \overrightarrow{ص} + \|\overrightarrow{A}\|$ جتا $\theta_ع \, \overrightarrow{ع}$

$\overrightarrow{A} = \|\overrightarrow{A}\|$ (جتا $\theta_س \, \overrightarrow{س}$ + جتا $\theta_ص \, \overrightarrow{ص}$ + جتا $\theta_ع \, \overrightarrow{ع}$)

حيث $(\theta_س , \theta_ص , \theta_ع)$ تسمى زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{A}$

جتا $\theta_س$ ، جتا $\theta_ص$ ، جتا $\theta_ع$ تسمى جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{A}$

لاحظ:

(جتا $\theta_س$ ، جتا $\theta_ص$ ، جتا $\theta_ع$) $= \dfrac{\overrightarrow{A}}{\|\overrightarrow{A}\|}$ = متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{A}$

ومنها:

جتا$^2 \theta_س$ + جتا$^2 \theta_ص$ + جتا$^2 \theta_ع$ = ١

**مثال:**

① إذا كان $\overrightarrow{A} = (-٢ ، ٢ ، ٢\sqrt{٢})$ أوجد جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{A}$

$\therefore \dfrac{\overrightarrow{A}}{\|\overrightarrow{A}\|} = \dfrac{(-٢ ، ٢ ، ٢\sqrt{٢})}{\sqrt{٤+٤+٨}} = \dfrac{(-٢ ، ٢ ، ٢\sqrt{٢})}{٤}$

$= (-\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢} ، \frac{\sqrt{٢}}{٢})$ أي جتا $\theta_س = -\frac{١}{٢}$ ، جتا $\theta_ص = \frac{١}{٢}$ ، جتا $\theta_ع = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

$\therefore$ زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{A}$ هي $(١٢٠° ، ٦٠° ، ٤٥°)$

② إذا كان المتجه $\overrightarrow{A}$ يصنع مع محاور الإحداثيات الموجبة زوايا متساوية القياس وكان قياس كل منها = $\theta$ أوجد جتا $\theta$.

**الحل**

جتا$^2 \theta_س$ + جتا$^2 \theta_ص$ + جتا$^2 \theta_ع$ = ١

جتا$^2 \theta$ + جتا$^2 \theta$ + جتا$^2 \theta$ = ١

٣ جتا$^2 \theta$ = ١ $\therefore$ جتا$^2 \theta = \frac{١}{٣}$ $\therefore$ جتا $\theta = \pm \frac{١}{\sqrt{٣}}$

**مثال:**

إذا كانت (١٣٥، ٦٠، θ) هي زوايا الاتجاه للمتجه $\vec{A}$ أوجد θ

وإذا كان معيار $\|\vec{A}\| = 6$ أوجد $\vec{A}$

**الحل**

∵ (١٣٥، ٦٠، θ) هي زوايا الاتجاه للمتجه $\vec{A}$

∴ جتا² ١٣٥ + جتا² ٦٠ + جتا² θ = ١

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ + جتا² θ = ١ ∴ $\frac{3}{4}$ + جتا² θ = ١ ∴ جتا² θ = $\frac{1}{4}$

∴ جتا θ = $\pm \frac{1}{2}$

عندما جتا θ = $\frac{1}{2}$ ∴ ق(θ) = ٦٠°

عندما جتا θ = $-\frac{1}{2}$ ∴ ق(θ) = ١٢٠°

∴ زوايا الاتجاه للمتجه $\vec{A}$ هي (١٣٥°، ٦٠°، ٦٠°) أو (١٣٥°، ٦٠°، ١٢٠°)

∴ $\vec{A}$ = ٦ جتا ١٣٥° س + ٦ جتا ٦٠° ص + ٦ جتا ٦٠° ع

= −٣√٢ س + ٣ ص + ٣ ع

أو $\vec{A}$ = ٦ جتا ١٣٥° س + ٦ جتا ٦٠° ص + ٦ جتا ١٢٠° ع

= −٣√٢ س + ٣ ص − ٣ ع

---

**مثال:** أوجد قياسات الزوايا التي يصنعها المتجه ق = ٣ س − ٤ ص + ٥ ع مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات

**الحل**

‖ق‖ = $\sqrt{(3)^2 + (-4)^2 + (5)^2}$ = ٥√٢

∴ ى = $\frac{\text{ق}}{\|\text{ق}\|}$ = $\frac{(3, -4, 5)}{5\sqrt{2}}$ = $\left(\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{-4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

∴ جتا θس = $\frac{3}{5\sqrt{2}}$ ∴ θس = ٦٤° ٥٤َ

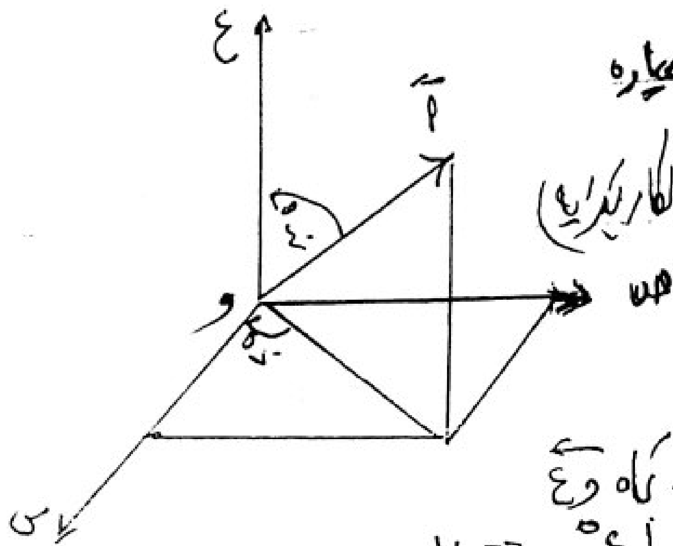
جتا θص = $\frac{-4}{5\sqrt{2}}$ ∴ θص = ١٢٤° ٢٧َ

جتا θع = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ∴ θع = ٤٥°

---

## مثال ١ :

في الشكل المقابل يمثل متجه أ مقداره ١٠ وحدات .




(أ) عبر عن المتجه أ بالصورة الجبرية (المركبات الكارتيزية)

(ب) أوجد قياسات زوايا الاتجاه لمتجه أ .

## الحل

نحلل أ إلى مركبتين الأولى في اتجاه وع

ومقدارها أع = ١٠ جتا θع = ١٠ جتا ٤٠° = ٧,٦٦

والثانية تقع في المستوى الأفقي س ص

أس ص = ||أ|| جا θع = ١٠ جا ٤٠° = ٦,٤٢٨

ثم نحلل المركبة أس ص إلى مركبتين الأولى في اتجاه وس ونعين مقدارها

أس = أس ص جتا ٧٠° = ٦,٤٢٨ جتا ٧٠° = ٢,١٩٩

والثانية في اتجاه وص ومقدارها

أص = أس ص جا ٧٠° = ٦,٤٢٨ جا ٧٠° = ٦,٠٤

∴ أ = أس س + أص ص + أع ع

= ٢,١٩٩ س + ٦,٠٤ ص + ٧,٦٦ ع

لإيجاد قياسات زوايا الاتجاه نوجد متجه الوحدة في اتجاه أ

ى = أ / ||أ|| = ١/١٠ (٢,١٩٩ س + ٦,٠٤ ص + ٧,٦٦ ع)

= ٠,٢١٩٩ س + ٠,٦٠٤ ص + ٠,٧٦٦ ع

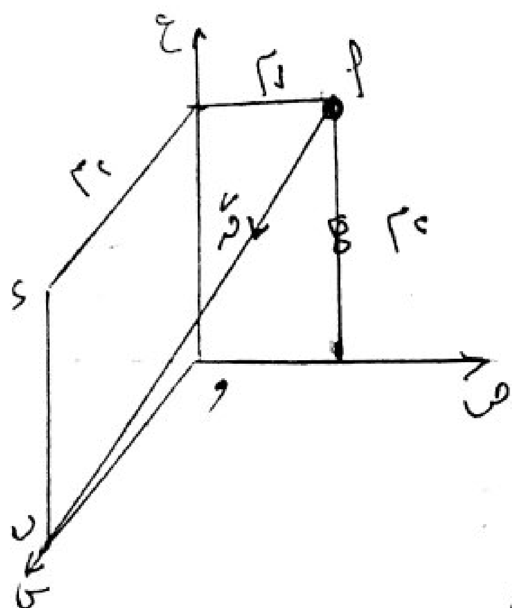
∴ جتا θس = ٠,٢١٩٩ ∴ θس = ٧٧,٣°

جتا θص = ٠,٦٠٤ ∴ θص = ٥٢,٨٤°

جتا θع = ٠,٧٦٦ ∴ θع = ٤٠°

**مثال**: من الشكل المقابل

إذا كانت قوة الشد في الخيط تساوي ٢١ نيوتن أوجد المركبات الجبرية للقوة $\vec{ق}$ في اتجاهات محاور الإحداثيات.



**الحل**

$\because$ $\vec{ق}$ = ‖ق‖ × متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{أب}$

$\vec{ق}$ = ‖ق‖ $\vec{ى}_{أب}$

$\because$ أ = (٠ ، ١ ، ٢) ، ب = (٢ ، ٠ ، ٠)

$\overrightarrow{أب}$ = ب − أ = (٢ ، ٠ ، ٠) − (٠ ، ١ ، ٢) = (٢ ، −١ ، −٢)

$\vec{ى}_{أب} = \frac{(٢ ، −١ ، −٢)}{\sqrt{٤+١+٤}} = \frac{(٢ ، −١ ، −٢)}{٣}$

$\vec{ق}$ = ٢١ × $\frac{(٢ ، −١ ، −٢)}{٣}$ = ٧ (٢ ، −١ ، −٢)

$\vec{ق}$ = (١٤ ، −٧ ، −١٤)

$\vec{ق}$ = ١٤ $\vec{س}$ − ٧ $\vec{ص}$ − ١٤ $\vec{ع}$

أو) $\vec{ق}$ = ‖ق‖ × $\frac{\overrightarrow{أب}}{‖\overrightarrow{أب}‖}$

= ٢١ × $\frac{(٢ ، −١ ، −٢)}{\sqrt{٤+١+٤}}$

= ٧ (٢ ، −١ ، −٢)

= (١٤ ، −٧ ، −١٤)

---

**مثال**

أ ب ج مثلث فيه أ(٢ ، ١ ، ٤) ، ب(٥ ، −٢ ، ٣) ، ج(−٣ ، ٠ ، ١) وكانت د منتصف $\overline{ب ج}$ إذا كانت $\vec{ق}$ تعمل في $\overrightarrow{أد}$ وكان ‖ق‖ = ٢٠ نيوتن أوجد $\vec{ق}$ باستخدام متجهات الوحدة الأساسية.

[redacted]

**الحل**

$\because$ د = $\left(\frac{٥−٣}{٢} ، \frac{−٢+٠}{٢} ، \frac{٣+١}{٢}\right)$ = (١ ، −١ ، ٢)

$\overrightarrow{أد}$ = د − أ = (١ ، −١ ، ٢) − (٢ ، ١ ، ٤) = (−١ ، −٢ ، −٢)

‖أد‖ = $\sqrt{١+٤+٤}$ = ٣

$\vec{ى}_{أد} = \frac{(−١ ، −٢ ، −٢)}{٣} = \left(\frac{−١}{٣} ، \frac{−٢}{٣} ، \frac{−٢}{٣}\right)$

$\vec{ق}$ = ٢٠ $\vec{ى}_{أد}$ = ٢٠ $\left(\frac{−١}{٣} ، \frac{−٢}{٣} ، \frac{−٢}{٣}\right)$

$\vec{ق}$ = $\frac{−٢٠}{٣}$ $\vec{س}$ − $\frac{٤٠}{٣}$ $\vec{ص}$ − $\frac{٤٠}{٣}$ $\vec{ع}$

أو) $\vec{ق}$ = ‖ق‖ × $\frac{\overrightarrow{أد}}{‖أد‖}$

= ٢٠ × $\frac{(−١ ، −٢ ، −٢)}{\sqrt{١+٤+٤}}$

= ...